

## MATEMÁTICA

### Questão N° 01

Um pequeno mercado oferece a promoção *leve 5 e pague 4*, indicando que, por 5 unidades de um produto, o cliente pagaria apenas o preço referente a 4 unidades. Uma unidade do produto custa R\$ 10,25 e Celso decide aproveitar a promoção levando 5 unidades.

a) Quantos reais a menos Celso pagou por cada unidade que levou?

b) Se a promoção fosse "Na compra de 5 produtos iguais, receba um desconto de  $x\%$  no preço de cada unidade do produto", quanto valeria  $x$  para que a promoção fosse equivalente à promoção original do enunciado?

Solução:

a) Segundo a promoção, Celso pagará por 5 unidades do produto um total, em reais, de

$$4 \times 10,25 = 41$$

Cada unidade do produto custará para Celso um total, em reais, de

$$41 \div 5 = 8,2$$

Portanto, Celso pagará  $10,25 - 8,2 = 2,05$  reais a menos por cada unidade do produto.

b) Para que as promoções sejam equivalentes, o desconto de  $x\%$  deve ser equivalente ao desconto em reais de R\$ 2,05, ou seja

$$x\% \text{ de } 10,25 = 2,05$$

$$\frac{x}{100} = \frac{2,05}{10,25} = \frac{1}{5}$$

$$x = \frac{100}{5} = 20$$

**Questão Nº 02**

Seja  $F$  a forma fatorada irredutível equivalente à expressão algébrica a seguir:

$$\frac{x^2 \cdot (x-1) + (x-2)^2 - (x-2) \cdot (x-1) - 1}{x^2 - 1}$$

a) Escreva  $F$ .

b) Calcule o valor numérico de  $F$  quando  $x = 2$ .

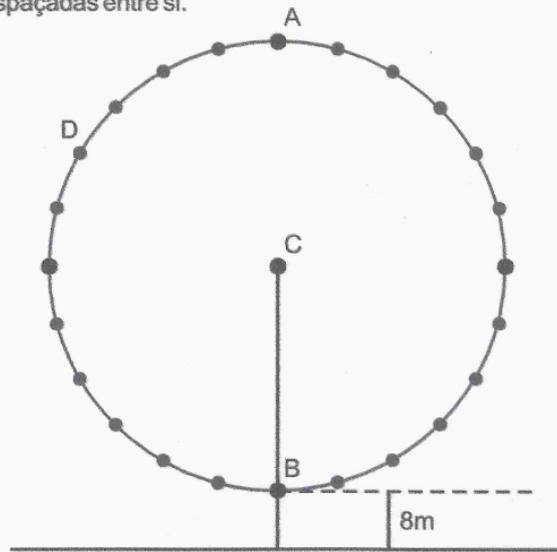
Solução:

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{x^2 \cdot (x-1) + (x-2)^2 - (x-2) \cdot (x-1) - 1}{x^2 - 1} &= \frac{[x^2 \cdot (x-1) - (x-2) \cdot (x-1)] + [(x-2)^2 - 1]}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{(x-1) \cdot (x^2 - x + 2) + (x-2+1) \cdot (x-2-1)}{x^2 - 1} = \frac{(x-1) \cdot (x^2 - x + 2) + (x-1) \cdot (x-3)}{x^2 - 1} = \\ &= \frac{(x-1) \cdot (x^2 - x + 2 + x - 3)}{x^2 - 1} = \frac{(x-1) \cdot \cancel{(x^2 - 1)}}{\cancel{x^2 - 1}} = x - 1 \end{aligned}$$

b) O Valor numérico de  $F$  para  $x = 2$ , será  $2 - 1 = 1$ . O mesmo valor pode ser obtido substituindo-se  $x$  por 2 na expressão original, pois ela é equivalente a  $F$  para todos os valores reais, exceto quando  $x = \pm 1$ .

**Questão Nº 03**

O esquema a seguir representa uma roda gigante em construção que terá 120m de diâmetro. Cada ponto representa uma das 24 cabines igualmente espaçadas entre si.



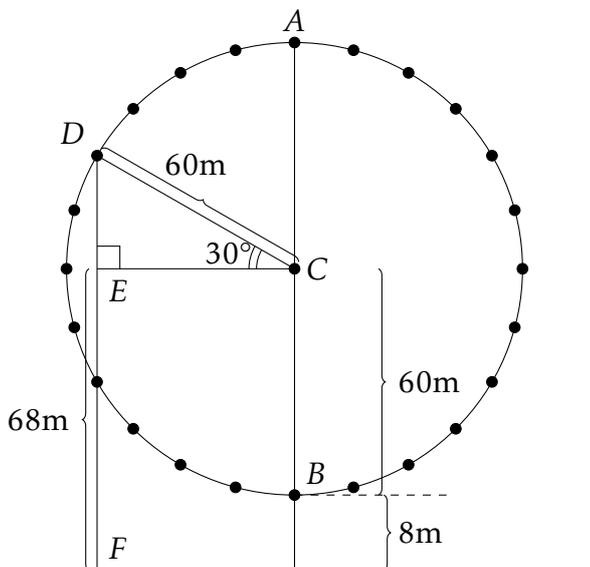
O ponto C representa o centro da roda gigante e os pontos A e B são, respectivamente, os pontos mais alto e mais baixo da roda gigante.

- a) Qual o comprimento, em metros, do arco AD?
- b) Qual a altura, em metros, do ponto D em relação ao chão?

(Utilize, se necessário, a aproximação  $\pi = 3,1$ )

Solução:

- a) As 24 cabines dividem a circunferência em 24 arcos de  $15^\circ$ . O Arco  $\widehat{AD}$  compreende 4 arcos de  $15^\circ$ , portanto  $\widehat{AD} = 60^\circ$ . Em outras palavras, o comprimento, em metros, de  $\widehat{AD}$  é  $\frac{1}{6}$  do comprimento da circunferência que é dado por  $2R \times \pi$ . Desse modo, usando a aproximação indicada  $\pi = 3,1$ , temos  $\widehat{AD} = \frac{120 \times 3,1}{6} = 62$  metros.
- b) No desenho a seguir, traçamos a distância  $DF$  da cabine até o chão e a perpendicular  $CE$ . Como  $EF = 60 + 8 = 68$ , basta encontrarmos o comprimento de  $DE$ .



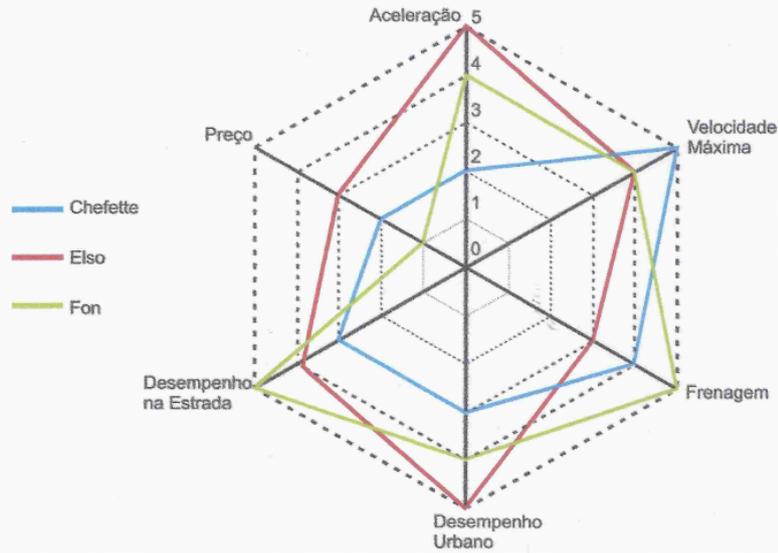
$$\text{sen } 30^\circ = \frac{DE}{60} = \frac{1}{2} \therefore DE = 30$$

$$DF = DE + EF = 30 + 68 = 98$$

**Questão N° 04**

Os automóveis Chefette, Elso e Fon foram avaliados pela revista *Quebra Rodas* em relação a seis itens. Em cada quesito, os modelos receberam notas de 0 a 5, sendo atribuída nota 0 para  *muito ruim* e nota 5 para *ótimo*. As notas foram dispostas em segmentos graduados com mesma origem, que formam o gráfico a seguir:

De acordo com as informações dadas no gráfico, responda:



- a) Qual foi o modelo com a melhor avaliação, considerando a soma de todas as notas?
- b) O modelo com pior preço é o melhor em que itens?

Solução:

a) A tabela a seguir mostra a pontuação de cada um dos carros considerados:

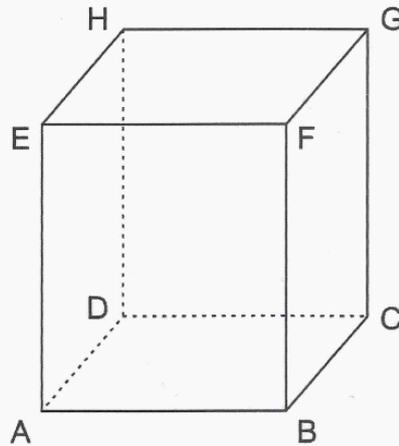
	Aceleração	Vel. Máxima	Frenagem	Des. Urb.	Des. Estr.	Preço	Total
Chefette	2	5	4	3	3	2	19
Elso	5	4	3	5	4	3	24
Fon	4	4	5	4	5	1	23

Portanto o que tem a maior soma é o carro ELSO.

b) O modelo com o pior preço é FON que é melhor que os demais nos quesitos **Frenagem** e **Desempenho na Estrada**.

**Questão N° 05**

No bloco retangular mostrado na figura a seguir, as faces  $ABCD$  e  $EFGH$  são quadrados iguais e as demais faces são retângulos iguais.

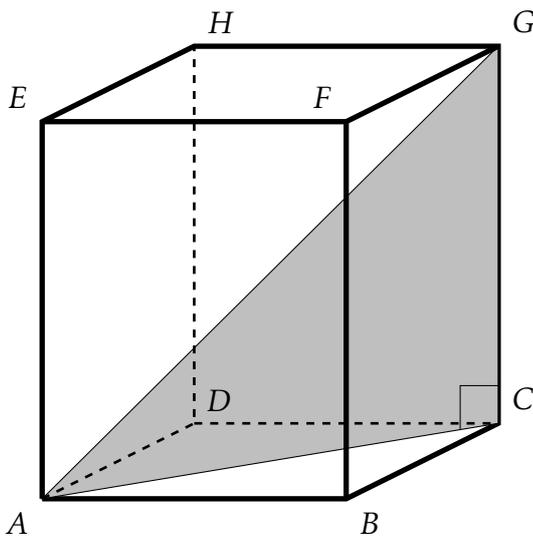


Cada quadrado tem perímetro 1600cm e cada retângulo tem um dos lados medindo 7m.

- a) Qual a distância, em metros, do ponto A ao ponto G?  
b) Qual o volume, em litros, do bloco retangular?

Solução:

- a) Os quadrados  $ABCD$  e  $EFGH$  têm lados medindo 4m, pois seus perímetros valem 1600cm. Usando o teorema de Pitágoras, encontramos a diagonal  $AC = 4 \cdot \sqrt{2}$ m do quadrado  $ABCD$ . Utilizaremos novamente o teorema de Pitágoras no triângulo  $AGC$



Utilizaremos novamente o teorema de Pitágoras no triângulo  $AGC$ :

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$

$$AG^2 = (4\sqrt{2})^2 + 7^2 = 32 + 49 = 81$$

$$AG = \sqrt{81} = 9\text{m}$$

- b) O volume do bloco retangular é dado pelo produto de suas dimensões, ou seja  $V = AB \times BC \times CG = 4 \times 4 \times 7 = 112\text{m}^3$ . Cada metro cúbico equivale a 1.000 litros, portanto o volume pedido é 112.000 litros.

**Questão N° 06**

Para delimitar um terreno retangular com  $360 \text{ m}^2$  de área, deve-se construir uma cerca na parte da frente e muros nas laterais e nos fundos do terreno. Tanto a cerca quanto os muros são padronizados na altura, de modo que seus custos de construção dependem apenas das suas extensões. O metro da cerca construída custa R\$ 10,00, enquanto o metro do muro construído custa R\$ 20,00.

- a) Descreva o custo total  $C$  do cercamento em função do comprimento  $x$  da frente do terreno.  
b) Calcule as dimensões do terreno, de modo que o custo total do cercamento seja igual a R\$ 1560,00, considerando que a frente do terreno é menor que as laterais.

Solução:

- a) Se  $x$  é o comprimento em metros da frente (e também dos fundos) do terreno, para que a área da região retangular seja de  $360 \text{ m}^2$  as laterais devem medir  $\frac{360}{x}$  metros. O cercamento consiste na construção de uma cerca com comprimento  $x$  e na construção de um muro de comprimento  $x + \frac{720}{x}$ . Usando os valores de cada metro do enunciado, podemos escrever

$$C(x) = 10x + 20\left(x + \frac{720}{x}\right)$$

$$C(x) = 30x + \frac{14400}{x}$$

- b) Utilizando a expressão encontrada, devemos encontrar o valor de  $x$  que torna verdadeira a igualdade  $C(x) = 1560$ . De posse do valor de  $x$  podemos encontrar o comprimento das laterais pela expressão  $\frac{360}{x}$ .

$$30x + \frac{14400}{x} = 1560$$

$$30x^2 - 1560x + 14400 = 0$$

$$x^2 - 52x + 480 = 0$$

$$x^2 - 2 \times 26x + 676 = 676 - 480$$

$$(x - 26)^2 = 196$$

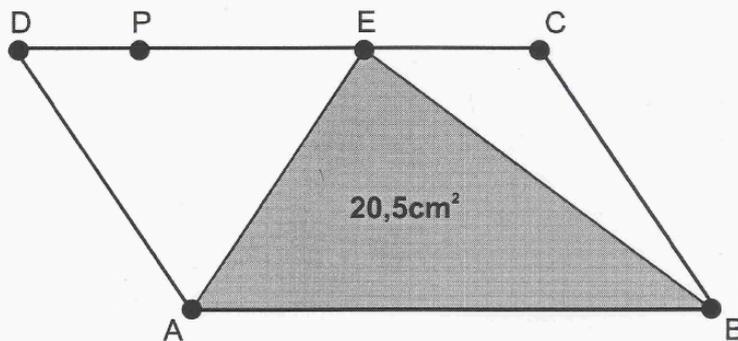
$$|x - 26| = 14$$

$$x = 26 \pm 14$$

Portanto a frente do terreno poderia ser  $x = 40$ , mas daí teríamos a lateral  $\frac{360}{40} = 9$ , o que não é permitido porque a frente do terreno deve ser menor que a lateral. Outra possibilidade é  $x = 12$  e, nesse caso, a lateral mede  $\frac{360}{12} = 30$ . Portanto as dimensões do terreno para que o custo seja R\$1560,00 devem ser 12m de frente por 30m de lateral.

### Questão N°7

Na figura a seguir, ABCD é um paralelogramo e os pontos E e P foram tomados sobre o lado CD de modo que a área do triângulo ABE fosse igual a  $20,5 \text{ cm}^2$ .



a) Qual seria a área, em  $\text{cm}^2$ , do triângulo ABP?

b) Qual a área do paralelogramo ABCD?

Solução:

- a) O triângulo  $APB$  tem a mesma base  $AB$  e a mesma altura, dada pela distância entre os lados paralelos  $CD$  e  $AB$  do paralelogramo, que o triângulo  $AEB$ . Portanto o triângulo  $APB$  tem a mesma área de  $20,5 \text{ cm}^2$
- b) Com o mesmo argumento do item a), podemos concluir que a área do triângulo  $ADB$  também vale  $20,5 \text{ cm}^2$ . Mas o triângulo  $ABD$  é congruente ao triângulo  $CBD$  (caso Ângulo - Lado - Ângulo, por exemplo) e portanto  $CBD$  tem também área  $20,5 \text{ cm}^2$ . O paralelogramo pode ser decomposto, sem superposição nesses triângulos de modo que sua área será a soma das áreas de  $ADB$  com  $CBD$ , ou seja,  $A_{ABCD} = A_{ADB} + A_{CBD} = 41 \text{ cm}^2$

**Questão Nº 08**

O Cefet/RJ oferece a seus alunos atividades extracurriculares para complementação de sua formação. No ano de 2018, 25% dos seus 1440 alunos inscreveram-se nos cursos de Dança Contemporânea ou de Teatro. Dos alunos inscritos,  $\frac{1}{9}$  desistiu e não compareceu nem participou de nenhuma das aulas. Após inscrições e desistências, cada curso contou com a participação de 200 alunos.

- a) Quantos alunos não participaram de nenhuma das atividades extracurriculares apresentadas?
- b) Escolhendo-se ao acaso um aluno que participa das atividades extracurriculares apresentadas, qual a probabilidade de que ele participe tanto de Dança quanto de Teatro?

Solução:

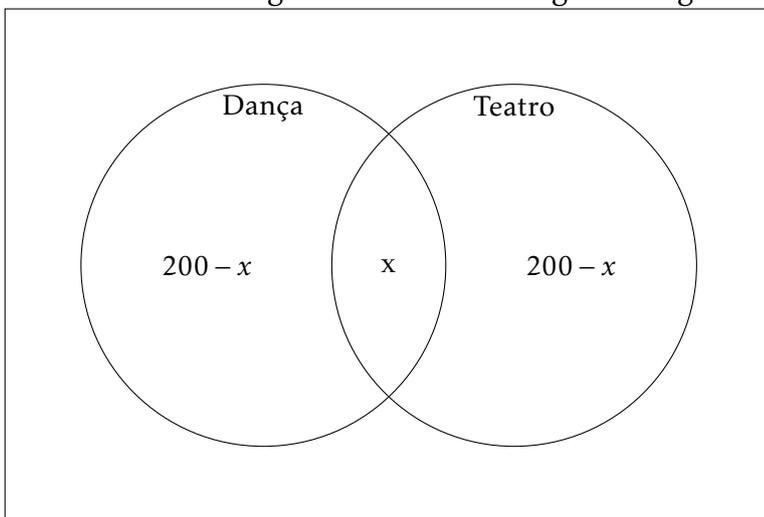
- a) Não participaram de nenhuma atividade extracurricular os alunos que não se inscreveram e os alunos que se inscreveram, mas não compareceram.

Não se inscreveram: 75% de 1440 = 1080

Inscreveram-se, mas não compareceram:  $\frac{1}{9}$  de 360 = 40

Total: 1080 + 40 = 1120

- b) Preenchendo o diagrama conforme a figura a seguir:



Temos que  $200 - x + x + 200 - x = 320$  e, portanto,  $x = 80$ . A probabilidade de escolhermos um aluno que participa de ambas as atividades, dentre os 320 que participam de alguma atividade, é

$$P(\text{Dança e Teatro}) = \frac{80}{320} = 25\%$$

### Questão N° 09

Anualmente, o Cefet/RJ, em seus diversos *campi*, participa da Olimpíada Brasileira de Astronomia (OBA), tendo, este ano, diversos alunos selecionados para representar o Brasil nas olimpíadas internacionais no tema.

Em astronomia, é importante conseguir relacionar a influência que um corpo exerce sobre outro. A Lei da Gravitação Universal, por exemplo, afirma que dois corpos quaisquer de massas  $m_1$  e  $m_2$  se atraem com uma força  $F$ , medida em Newtons (N), que é proporcional ao produto de suas massas, medidas em kg, e inversamente proporcional ao quadrado da distância  $d$ , medida em metros, entre os corpos. A constante de proporcionalidade é chamada constante de gravitação universal, dada por

$$G = 10^{-10} \frac{\text{N} \times \text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

Levando em conta apenas as relações de proporcionalidade descritas no texto, um aluno escreveu 2 expressões na tentativa de expressar a força  $F$  de atração.

$$\text{Expressão 1: } F = G \times \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$$

$$\text{Expressão 2: } F = G \times \frac{d^2}{m_1 \times m_2}$$

- a) Qual das duas tentativas expressa a relação descrita no texto?  
b) Usando a expressão que você considerou correta, qual o valor aproximado da força, em Newtons, de atração entre a Terra e a Lua, considerando que a massa da Terra é aproximadamente  $10^{25}$  kg, a massa da Lua é aproximadamente  $10^{23}$  kg e a distância entre a Terra e a Lua é aproximadamente  $10^8$  m.

Solução:

- a) Procuramos uma expressão em que a força  $F$  é diretamente proporcional às massas  $m_1$  e  $m_2$ . Para decidir entre a Expressão 1 e a Expressão 2, podemos dobrar o valor de uma das massas mantendo os demais valores inalterados. Note que na Expressão 1, o valor da Força  $F$  será dobrado também, enquanto na Expressão 2, a força  $F$  ficará dividida por 2. Nesse caso, se uma das expressões atende todas as condições, essa expressão não pode ser a Expressão 2 e, portanto, basta fazer os testes semelhantes para a Expressão 1, que é a correta.
- b) Usando a Expressão 1:

$$F = 10^{-10} \times \frac{10^{25} \times 10^{23}}{(10^8)^2}$$
$$F = 10^{25+23-10-16} = 10^{22}\text{N}$$

Usando a Expressão 2:

$$F = 10^{-10} \times \frac{(10^8)^2}{10^{25} \times 10^{23}}$$
$$F = 10^{16-25-23-10} = 10^{-42}\text{N}$$

**Questão N° 10**

Alguns alunos do Cefet/RJ participaram de um projeto em que montaram uma nova escala de medida de temperatura batizada por eles de *grau Suckow*, cuja notação é °S. O projeto consiste em montar, em uma plataforma de prototipagem de *hardware* livre, um termômetro nessa escala. Eles utilizarão, além do módulo de medição de temperatura livre de mercúrio, um módulo de *display* que mostra uma reta com uma marcação no número que representa a medida feita.

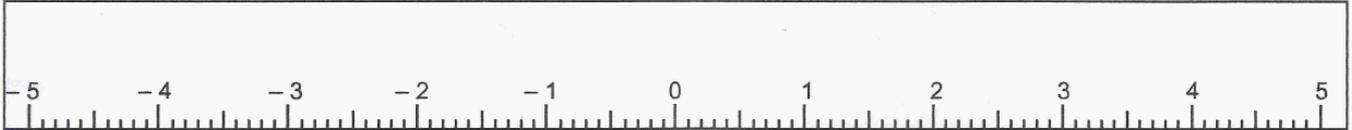
Para comparação com a escala Celsius, que é padrão no Brasil, eles chegaram a seguinte relação:

$$\frac{S}{100} = \frac{C - 25}{25}$$

em que S representa a temperatura em graus Suckow e C, a temperatura em graus Celsius.

a) A figura a seguir representa o *display* do protótipo. Marque na figura, com uma seta (↑), a temperatura de  $-1,8^{\circ}\text{S}$ .

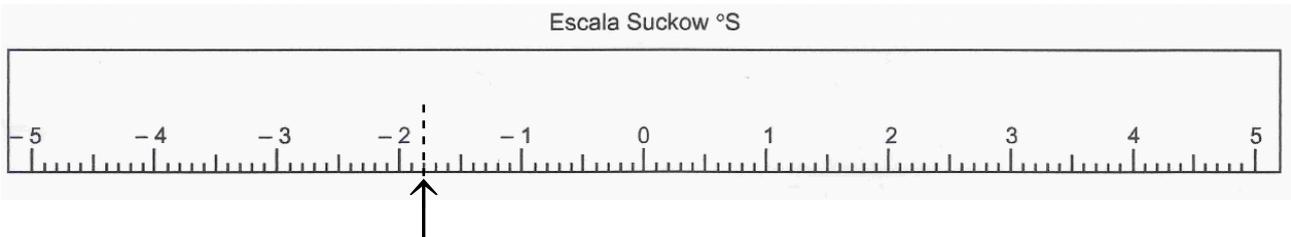
Escala Suckow °S



b) Converta o valor marcado para graus Celsius.

Solução:

a) A figura a seguir mostra a seta marcando a temperatura:



b) Basta substituir na expressão o S pelo valor  $-1,8$  e encontrar o valor de C:

$$\frac{-1,8}{100} = \frac{C - 25}{25}$$

$$-1,8 = 4C - 100$$

$$4C = 100 - 1,8 = 98,2$$

$$C = \frac{98,2}{4} = 24,55$$